## 基础课17 导数与函数的单调性

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 导数与函数单调性 | 掌握 | 2023年新高考Ⅰ卷  2023年新高考Ⅱ卷、  2023年全国甲卷（理）  2023年全国甲卷（文）  2023年全国乙卷（理）、  2023年全国乙卷（文）  2023年北京卷 | ★★★ | 数学运算逻辑推理 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，导数与函数的单调性是高考常考内容，试题难度中等及以上.命题热点为含有参数的函数的单调性问题，涉及分类讨论的数学思想.预计2025年高考命题情况不变 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

**函数的单调性与导数的关系**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 条件 | 恒有 | 结论 |
| 函数在区间上可导 |  | 在区间上①单调递增 |
|  | 在区间上②单调递减 |
|  | 在区间上是③常数函数 |

##### 知识 拓展

1.若函数在上单调递增，则当时，恒成立；若函数在上单调递减，则当时，恒成立.

2.若函数在上存在单调递增区间，则当时，有解；若函数在上存在单调递减区间，则当时，有解.

3.研究函数的单调性，要坚持“定义域优先”原则.

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 若函数在上单调递增，则一定有恒成立.( × )

（2） 如果函数在某个区间内恒有，那么在此区间内没有单调性.( √ )

（3） 函数为上的增函数的一个充分不必要条件是.( × )

（4） 函数的单调递减区间是.( √ )

2. （易错题）设函数，且，则的单调递增区间为，.

**【易错点】**忽视函数的定义域致误.

[解析]由题意得函数的定义域为.因为，所以，所以，所以，令，得或，所以函数的单调递增区间为，.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版选修②P97·T2改编）函数的单调递增区间是，.

[解析]因为，

所以，

令,解得或，

故的单调递增区间为，.

4. （人教A版选修②P87·例3改编）已知函数在上单调递增，则实数的取值范围为.

[解析]因为，

所以，因为在上单调递增，

所以恒成立，所以，解得，

所以实数的取值范围为 .

##### 题组3 走向高考

5. [2023·新高考Ⅱ卷]已知函数在区间上单调递增，则实数的最小值为( C ).

A. B. C. D.

[解析]依题可知，在上恒成立，显然，所以在上恒成立，设,，则，所以在上单调递增，所以，故，即，故实数的最小值为.故选.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 具体函数的单调性［自主练透］

1. 函数的单调递减区间是( A ).

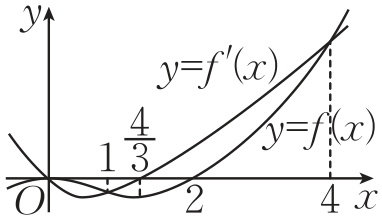
A. B. C. D.

[解析]由题意得，，

当时，，的单调递减区间是.

故选.

2. （多选题）已知函数与的部分图象如图所示，则( AC ).



A. 在区间上单调递增 B. 在区间上单调递减

C. 在区间,上单调递减 D. 在区间,上单调递减

[解析]当或时，，则函数的定义域为，故，错误.

，由题图易得当时，，即，所以函数在上单调递增；当,时，，即，所以函数在,上单调递减，故,正确.故选.

3. [2023·北京卷改编]函数的单调递减区间是和.

[解析]因为，所以，

令，解得或，

所以的单调递减区间为和.

4. [2023·全国甲卷改编]已知定义在区间,上的函数，则的单调递增区间是.

[解析]，

令,则，设，

当,即，时,.故在上单调递增.



**求函数单调区间的步骤**

1.确定函数的定义域.

2.求.

3.在定义域内解不等式，得函数的单调递增区间；在定义域内解不等式，得函数的单调递减区间.

4.书写相同类型单调区间之间用“逗号”或“和”隔开，切记不可用“ ”.

#### 考点二 含参函数的单调性讨论［师生共研］

典例1 [2023·新高考Ⅰ卷节选]已知函数，讨论的单调性.

[解析]因为，定义域为，

所以.

当时，由于，则，故恒成立，

所以在上单调递减.

当时，令，解得，

当时，，则在上单调递减；

当时，，则在上单调递增.

综上，当时，在上单调递减；

当时，在上单调递减，在上单调递增.



1.研究含参数的函数的单调性，要考虑参数对不等式解集的影响，并进行分类讨论.

2.在划分函数的单调区间时，要在函数定义域内讨论，还要确定导数为0的点和函数的间断点.

3.个别导数为0的点不影响所在区间的单调性，如，在时取到），在上是增函数.

##### 针对训练

已知函数,，讨论的单调区间.

[解析],且，则.

当时，，则在上单调递增.

当时，，

①当时，，所以的单调递减区间为；

②当时，，所以的单调递增区间为.

综上所述，当时，的单调递增区间为，无单调递减区间；

当时，函数的单调递减区间为，单调递增区间为.

#### 考点三 导数与函数单调性的应用［多维探究］

##### 比较大小角度1

典例2 [2024·福建模拟]已知函数，若，，，则，，的大小关系为( B ).

A. B. C. D.

[解析]，当时，，所以在上单调递增，

因为，所以，因为 ，所以，所以，又在上单调递增，所以.故选.



**利用导数比较大小的方法**

1.若已知函数的解析式，则首先要判断已知函数的单调性，根据单调性比较大小.

2.若函数的解析式未知，则需要利用题目条件构造辅助函数，并根据构造的辅助函数的单调性比较大小.

##### 解不等式角度2

典例3 已知函数，则不等式的解集为( D ).

A. B.

C. D.

[解析]的定义域为，

因为，所以在上单调递减，

所以不等式等价于，解得或，

所以不等式的解集为.

故选.



**利用导数解不等式的方法**

利用导数解不等式的关键是用导数判断函数的单调性或者构造函数后使用导数，同时根据奇偶性变换不等式为，利用单调性得出关于,的不等式，解此不等式得出范围.

##### 根据函数单调性求参数的取值范围角度3

典例4 若函数在区间,内存在单调递增区间，则实数的取值范围是.

[解析] 函数在区间，内存在单调递增区间，

又函数在区间上单调递增，

，解得.故实数的取值范围是.

在区间，上有解，即在区间，上有解，

变式设问 在本例中，若把“在区间内存在单调递增区间”改为“在区间上单调递增”，则实数的取值范围是.

[解析] 函数在区间上单调递增，在区间上恒成立，即在区间上恒成立，

又函数在区间上单调递增，，解得.故实数的取值范围是.



**求参数范围的常见类型和解题技巧**

|  |  |
| --- | --- |
| 已知可导函数在区间上单调递增（或递减） | 转化为或对恒成立问题，要注意“”是否取到 |
| 已知可导函数在某一区间上存在单调递增（或递减）区间 | 实际上就是或在该区间上存在解集，这样就把函数的单调性问题转化为不等式问题 |
| 已知在区间上的单调性，区间中含有参数 | 先求出的单调区间，令是其单调区间的子集，从而可求出参数的取值范围 |
| 已知在区间上的不单调 | 在上有极值点，且极值点不是的端点 |

##### 多维训练

1. 已知函数，则不等式的解集为.

[解析]由题意可知，函数的定义域为.

因为恒成立，所以在上单调递减.

由,可得解得，即原不等式的解集为.

2. （改编）已知函数是偶函数,当时,,设,,,则,,的大小关系为.

[解析] 函数是偶函数, 函数的图象关于直线对称,则，.

当时,, 函数在区间上为增函数,则,即,.

3. 已知函数在区间上不是单调函数，求实数的取值范围.

[解析]因为在区间上不是单调函数，所以在区间上有解，即在区间上有解.

令，则,当时，；当时，.故在上单调递减，在上单调递增.又因为,,，且当时，,

所以在区间上单调递增，所以，解得.

故实数的取值范围是.